Partie numérique (20 points)

Exercice 1 (2,5 points)

1) Sans calculer de PGCD, simplifier les fractions suivantes pour les rendre irréductibles : $\frac{35}{42}$ et $\frac{195}{270}$

2) Calculer l'expression suivante, en donnant le résultat sous forme de fraction irréductible :

$$A = \frac{16}{25} + \frac{-2}{7} \times \frac{21}{5}$$

Exercice 2 (4 points)

1) Calculer le PGCD de 108 et 135.

2) Marc a 108 billes rouges et 135 billes noires. Il les répartit en paquets de telle sorte que :

   a) les paquets contiennent des billes des deux couleurs et soient composés de façon identique

   b) toutes les billes soient utilisées

   Quel nombre maximal de paquets pourra-t-il composer ? Justifier votre réponse.

   Combien y aura-t-il de billes rouges et de billes noires dans chaque paquet ?

Exercice 3 (2 points)

Ecrire $B = \sqrt{24} + \sqrt{294} - \sqrt{150}$ sous la forme $a\sqrt{6}$ où a est un nombre entier relatif à déterminer.

Exercice 4 (6,5 points)

On donne $C = (x-4)(2+6x) - (x-4)^2$

a. Développer et réduire C

b. Factoriser C

c. Calculer C lorsque $x = \frac{1}{2}$

d. Lorsque $x = -\sqrt{3}$ écrire C sous la forme $a + b\sqrt{3}$ où a et b sont des entiers relatifs à déterminer.

e. Résoudre l'équation $(x-4)(6+5x) = 0$

Exercice 5 (5 points)

Pour financer le voyage de la classe de 3^{ième} B en Espagne, les élèves ont confectionné puis vendu des colliers. La recette se monte à 180€. Elle est constituée de 23 billets en tout, certains de 5€ les autres de 10€. On note n le nombre de billets de 5€.

1) Exprimer en fonction de n :
   a) le nombre de billets de 10€

   b) la recette totale

2) Ecrire une égalité vérifiée en utilisant la question 1b)

3) Quel est le nombre de billets de 5€ ? de 10€ ? Vérifier vos résultats.

Partie géométrique (20 points)

Exercice 1 (5,5 points)

Dans les deux cas vous pouvez raisonner sur une figure faite à main levée et codée.

1) Soit ABC un triangle rectangle en A tel que AB = 5 cm et $\widehat{B} = 35°$.

   Calculer les valeurs exactes puis les valeurs approchées au mm près de AC et de BC.

2) Soient deux triangles ABC et ADC rectangles en A tels que A soit un point du segment [DB].

   On sait que AB = 4cm , AC = 6 cm , et CD = 8 cm.

   Calculer $\widehat{B}$ et $\widehat{D}$ à 1° près.

Exercice 2 (6 points)

1) Construire un triangle ABC tel que AB = 6 cm, AC = 7,2 cm et BC = 10 cm

   Placer les points R, T et E tels que :

   R ∈ [AB] et AR = 4,5 cm

   T ∈ [AC] et (RT) // (BC)

   E ∈ [AB], E ∉ [AB] et BE = 2,1 cm

2) Calculer, en justifiant chaque réponse, les longueurs AT et TR.

3) Les droites (BT) et (EC) sont-elles parallèles ? Justifier la réponse.

Exercices 3 (5,5 points)

1) Tracer un segment [EF] de longueur 10 cm, puis un demi-cercle de diamètre [EF].

   Placer le point G sur ce demi-cercle tel que EG = 9 cm.

   a. Démontrer que le triangle EFG est rectangle.

   b. Calculer la longueur GF arrondie au mm.

2) Placer le point M sur le segment [EG] tel que EM = 5,4 cm et le point P sur le segment [EF] tel que EP = 6 cm. Démontrer que les droites (FG) et (MP) sont parallèles.

Exercice 4 (3 points)

α désigne la mesure en degré d'un angle aigu. On donne $\sin \alpha = \frac{12}{13}$

1) Sans déterminer la valeur de α , calculer cos α.

2) En déduire la valeur de tan α.

CORRECTION DU DEVOIR COMMUN 3e

PARTIE NUMÉRIQUE

Exercice 1 (2,5 points)

1) $\frac{35}{42} = \frac{7\times5}{7\times6} = \boxed{\frac{5}{6}}$

$\frac{195}{270} = \frac{15\times13}{15\times18} = \boxed{\frac{13}{18}}$

2) $A = \frac{16}{25} + \frac{-2}{7} \times \frac{21}{5}$

$A = \frac{16}{25} - \frac{2\times3\times7}{7\times5}$

$A = \frac{16}{25} - \frac{6}{5}$

$A = \frac{16}{25} - \frac{30}{25}$

$\boxed{A = -\frac{14}{25}}$

Exercice 2 (4 points)

1) 135 | 108 / 27 | 1 (Algorithme d'Euclide)

108 | 27 / 0 | 4

donc PGCD (135 ; 108) = 27

2) Marc souhaite répartir toutes ses billes dans des paquets identiques en les utilisant toutes. Le nombre de paquets est donc le plus grand diviseur commun de 108 et 135. D'après le 1), c'est donc 27.

$135 = 27\times5$

$108 = 27\times4$

Dans chaque paquet, il y aura donc 5 billes noires et 4 billes rouges.

Exercice 3 (2 points)

$B = \sqrt{24} + \sqrt{294} - \sqrt{150}$

$B = \sqrt{4\times6} + \sqrt{49\times6} - \sqrt{25\times6}$

$B = 2\sqrt{6} + 7\sqrt{6} - 5\sqrt{6}$

$\boxed{B = 4\sqrt{6}}$

Exercice 4 (6,5 points)

$C = (x-4)(2+6x) - (x-4)^2$

a) $C = 2x + 6x^2 - 8 - 24x - (x^2 - 8x + 16)$

$C = 2x + 6x^2 - 8 - 24x - x^2 + 8x - 16$

$\boxed{C = 5x^2 - 14x - 24}$

b) $C = (x-4)(2+6x) - (x-4)(x-4)$

$C = (x-4)[(2+6x) - (x-4)]$

$C = (x-4)(2+6x-x+4)$

$\boxed{C = (x-4)(5x+6)}$

c) Pour $x = \frac{1}{2}$

$C = \left(\frac{1}{2} - 4\right)\left(5\times\frac{1}{2} + 6\right)$

$C = \left(-\frac{7}{2}\right)\left(\frac{5}{2} + \frac{12}{2}\right)$

$C = -\frac{7}{2} \times \frac{17}{2}$

$\boxed{C = -\frac{119}{4}}$

d) Pour $x = -\sqrt{3}$

$C = 5\times(-\sqrt{3})^2 + 14\sqrt{3} - 24$

$C = 5\times3 + 14\sqrt{3} - 24$

$\boxed{C = -9 + 14\sqrt{3}}$

e) $(x-4)(6+5x) = 0$

On applique la règle du produit nul :

$x - 4 = 0$ ou $6 + 5x = 0$

ie $x = 4$ ou $5x = -6$

ie $x = 4$ ou $x = -\frac{6}{5}$

L'équation a 2 solutions :

$\boxed{S = \left\{-\frac{6}{5} ; 4\right\}}$

Exercice 5 (5 points)

Soit m le nombre de billets de 5€.

1) a) Nombre de billets de 10€ : $\boxed{23 - m}$

b) Recette totale : $\boxed{5m + 10(23-m)}$

2) La recette totale est de 180€.

D'où l'égalité : $\boxed{5m + 10(23-m) = 180}$

3) On résout l'équation :

$5m + 230 - 10m = 180$

$-5m = 180 - 230$

$-5m = -50$

$m = \frac{-50}{-5}$

$m = 10$

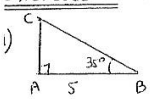
Il y a donc 10 billets de 5€ et 13 billets de 10€.

Vérification : $10\times5 + 13\times10 = 50 + 130 = 180$

PARTIE GÉOMÉTRIQUE

Exercice 1 (5,5 pts)

1)



Dans le triangle ABC rectangle en A, on a :

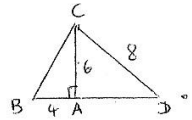
$\tan \hat{B} = \frac{AC}{AB}$ et $\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC}$

$\tan 35° = \frac{AC}{5}$ $\cos 35° = \frac{5}{BC}$

$AC = 5 \times \tan 35°$ cm $BC = \frac{5}{\cos 35°}$ cm

$AC \approx 3,5$ cm $BC \approx 6,1$ cm

2)



- Dans le triangle ABD rectangle en A, on a :

$\tan \hat{B} = \frac{CA}{BA} = \frac{6}{4}$

En utilisant les touches [shift] [tan] de la calculatrice, on obtient $\hat{B} \approx 56°$

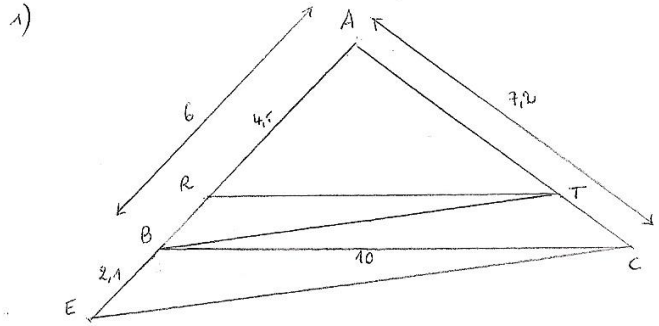
- Dans le triangle ACD rectangle en A, on a :

$\sin \hat{D} = \frac{AC}{CD} = \frac{6}{8}$

En utilisant les touches [shift] [sin] de la calculatrice, on obtient : $\hat{D} \approx 49°$

Exercice 2 (6 pts)

1)



2) Soit le triangle ABC.
Soit R point de [AB] et T point de [AC] } tels que (RT) // (BC) (par construction)
Alors, d'après le théorème de Thalès, on a : $\frac{AR}{AB} = \frac{AT}{AC} = \frac{RT}{BC}$

ie $\frac{4,5}{6} = \frac{AT}{7,2} = \frac{RT}{10}$

Calcul de AT

$\frac{4,5}{6} = \frac{AT}{7,2}$

$6 \times AT = 4,5 \times 7,2$

$6 \times AT = 32,4$

$AT = \frac{32,4}{6}$

$AT = 5,4$ cm

Calcul de RT

$\frac{4,5}{6} = \frac{RT}{10}$

$6 \times RT = 4,5 \times 10$

$6 \times RT = 45$

$RT = \frac{45}{6}$

$RT = 7,5$ cm

3) Soit le triangle AEC.
Soit B point de [AE] et T point de [AC] } tels que :

$\frac{AB}{AE} = \frac{6}{8,1} = \frac{60}{81} = \frac{\times 20}{3 \times 27} = \frac{20}{27}$

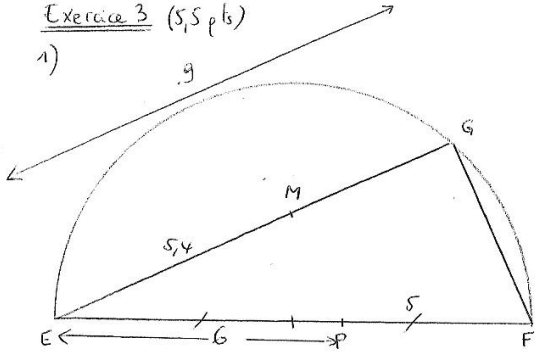
$\frac{AT}{AC} = \frac{5,4}{7,2} = \frac{54}{72} = \frac{18 \times 3}{18 \times 4} = \frac{3}{4}$

} donc $\frac{AB}{AE} \neq \frac{AT}{AC}$

D'après la contraposée du théorème de Thalès, on en déduit que les droites (BT) et (EC) ne sont pas parallèles

Exercice 3 (5,5 pts)

1)



a) Le point G est un point du cercle de diamètre [EF].
Donc le triangle EFG est rectangle en G.

b) Dans le triangle EFG rectangle en G, on applique le théorème de Pythagore :

$EF^2 = EG^2 + GF^2$
$10^2 = 9^2 + GF^2$
$100 = 81 + GF^2$
$GF^2 = 100 - 81$
$GF^2 = 19$
$GF = \sqrt{19}$
$GF \approx 4,4$ cm

2) Soit le triangle EFG.
Soit M point de [EG] et P point de [EF] } tels que :

$\frac{EM}{EG} = \frac{5,4}{9} = \frac{54}{90} = \frac{18 \times 3}{18 \times 5} = \frac{3}{5}$

$\frac{EP}{EF} = \frac{6}{10} = \frac{3 \times 2}{5 \times 2} = \frac{3}{5}$

} donc $\frac{EM}{EG} = \frac{EP}{EF}$

D'après la réciproque du théorème de Thalès, on en déduit que les droites (MP) et (GF) sont parallèles.

Exercice 4 (3 pts)

1) α désigne la mesure d'un angle aigu, donc :

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1$$

$$\cos^2\alpha + \frac{144}{169} = 1$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \frac{144}{169}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{169 - 144}{169}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{25}{169}$$

Comme $\cos\alpha > 0$, on a :

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{25}{169}} \quad \text{soit} \quad \boxed{\cos\alpha = \frac{5}{13}}$$

2) De plus : $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$$\tan\alpha = \frac{\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}}$$

$$\tan\alpha = \frac{12}{13} \times \frac{13}{5}$$

d'où $\boxed{\tan\alpha = \dfrac{12}{5}}$